ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,
ECOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ECOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1991

MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE
OPTION P'
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

NOTATIONS ET OBJECTIFS

- E désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, 2π-périodiques, telles que : pour toute f donnée dans E, il existe une subdivision finie de $[-\pi, +\pi]$, $-\pi = a_0 < a_1 \ldots < a_p = \pi$, f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$ et admet des limites finies à droite et à gauche en chacun des points a_i , la valeur de f en a_i est la demi-somme des limites à droite et à gauche.

- Pour toute fonction f de E , on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)| \ ; \ x \in \mathbb{R}\} .$$

Il sera admis que E muni de cette application $f \mapsto \|f\|_\infty$ est un espace vectoriel normé, noté $(E, \| \ \|_\infty)$.

- $\mathcal{P}$ désigne le sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques ; les fonctions P de $\mathcal{P}$ s'écrivent :

$$P(x) = \sum_{k=-n}^{n} C_k \ e^{ikx}$$

où les C_k sont des nombres complexes et n un entier naturel.

- C désigne le sous-espace vectoriel de E des fonctions continues.

Le but de ce problème est l'étude de la convergence de séries de Fourier et de la loi de composition qui, à deux fonctions f et g de E, fait correspondre la fonction f * g définie par :

$$(C) \qquad f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) \ g(t) \ dt \ .$$

A SUIVRE

PARTIE I

1°) a) Démontrer que la fonction $x \mapsto f * g(x)$ définie par la relation (C) est définie pour tout x réel, 2π-périodique, bornée et égale à la fonction $x \mapsto g * f(x)$; donner un majorant de $|g * f(x)|$ à l'aide de $\|f\|_\infty$ et $\|g\|_\infty$.

b) Démontrer que l'application $(f, g) \mapsto f * g$ est une loi de composition interne aux deux sous-espaces $\mathcal{P}$ et C .

c) Démontrer que si l'une des deux fonctions f et g est continue, $f * g$ l'est aussi. Donner dans ce cas un majorant de $\|f * g\|_\infty$ à l'aide de $\|f\|_\infty$ et de $\|g\|_\infty$.

2°) Soit α_k $k = 1, 2, \ldots$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$\alpha_k(t) = b_k \left(\frac{1 + \cos t}{2}\right)^k ,$$

le réel b_k est choisi de façon à ce que : $\int_{-\pi}^{\pi} \alpha_k(t)\, dt = 1$.

a) Etablir l'inégalité : $b_k \leqslant \frac{1}{4}(k + 1)$.

b) Etudier brièvement la fonction α_k sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$; graphe, maximum ; limite, lorsque l'entier k croît indéfiniment, de $\alpha_k(x)$ pour $x \in [a, \pi]$ avec $0 < a < \pi$; nature de la convergence.

c) Soit f une fonction donnée de C ; soit P_k la fonction $P_k = f * \alpha_k$.
Etablir que P_k appartient à $\mathcal{P}$ et que la suite P_k, $k = 1, 2, \ldots$ est convergente vers f dans $(C, \| \|_\infty)$. En déduire que $\mathcal{P}$ est dense dans C .

3°) Soit g une fonction de C, h une fonction de E ; soit $r_n(g, h)$ la fonction définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : (R) $r_n(g, h)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} g(x - t)\, h(t)\, e^{int}\, dt$.

a) Etablir que $r_n(g, h)$ appartient à C .

b) Démontrer que si g et h appartiennent à $\mathcal{P}$, la suite $\|r_n(g, h)\|_\infty$, $n = 1, 2, \ldots$ tend vers 0 lorsque n croît indéfiniment.
En déduire que cette propriété est encore vraie lorsque g et h appartiennent seulement à C .

c) Soit h une fonction de E ; démontrer que pour tout ε positif, il existe une fonction ψ de C telle que : $\int_{-\pi}^{\pi} |\psi(t) - h(t)|\, dt < \varepsilon$.

d) En déduire que la suite des fonctions $r_n(g, h)$ définies par la relation (R) tend vers 0 lorsque n croît indéfiniment dans $(C, \| \|_\infty)$.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

PARTIE II

Soit $f \in E$, $p \in \mathbb{Z}$; $C_p(f)$ désigne le coefficient de Fourier de f d'indice p :

$$C_p(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ipt}\, dt \ .$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(t)$ et $S_n(f;x)$ désignent les expressions :

$$S_n(t) = \sum_{p=-n}^{n} e^{ipt} \quad , \quad S_n(f;x) = \sum_{p=-n}^{n} C_p(f)\, e^{ipx} \ .$$

1°) a) Vérifier que S_n appartient à C et que $S_n(t)$ s'écrit pour $t \neq 2k\pi$:

$$S_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right)}{\sin \frac{t}{2}} \ .$$

b) Soit g_o la fonction impaire, 2π-périodique, définie par les relations :

Pour $t \in]0, \pi[$: $g_o(t) = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} - \dfrac{2}{t}$; $g_o(0) = 0$; $g_o(\pi) = 0$.

Vérifier que g_o appartient à E ; démontrer que $S_n(t)$ s'écrit :

$$S_n(t) = 2\,\frac{\sin(nt)}{t} + \sin(nt)\, g_o(t) + \cos(nt) \ .$$

c) Démontrer la relation : $S_n(f;x) = \dfrac{1}{2\pi}\, f * S_n(x)$.

2°) Soit $f \in C$; démontrer que $S_n(f;x)$ peut s'écrire :

$$S_n(f;x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t)\, \frac{\sin(nt)}{t}\, dt + \rho_n(f)(x)$$

où $\rho_n(f)$ est une fonction qui tend vers 0 dans $(C, \| \ \|_\infty)$ lorsque n croit indéfiniment.

Retrouver, en choisissant une fonction f particulière, la valeur de l'intégrale :

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}\, du \ .$$

3°) La fonction f est supposée maintenant vérifier la condition : il existe un réel α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ et un réel M $(M > 0)$ tels que pour tout x et y réels :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M\, |x - y|^{\alpha} \ .$$

a) Démontrer que la suite des fonctions $x \mapsto S_n(f;x)$, $n = 1, 2, \ldots$ converge vers f dans $(C, \| \ \|_\infty)$. On pourra utiliser la fonction k de E définie par :

$$k(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} & \text{si} \quad a < |t| < \pi \\ 0 & \text{si} \quad |t| < a \end{cases} \qquad \text{où a est un réel} \quad 0 < a < \pi \ .$$

b) Démontrer la relation pour tout entier $p \in \mathbb{Z}^*$: $|C_p(f)| \leqslant \dfrac{M}{2} \left(\dfrac{\pi}{|p|}\right)^{\alpha}$.

A SUIVRE

PARTIE III

Soit g_p , p = 1, 2, ... la suite des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$g_p(t) = \prod_{k=1}^{p} (1 + \cos(4^{k-1} t)) = (1 + \cos t)(1 + \cos 4t) \ldots (1 + \cos(4^{p-1} t)) .$$

1°) a) Donner les expressions linéarisées de g_1, g_2, g_3 .

b) Démontrer les résultats suivants : il existe une suite de réels a_k, k = 0, 1, 2,... et des entiers N_p tels que la fonction g_p s'écrive :

$$g_p(t) = \sum_{k=0}^{N_p} a_k \cos(kt) .$$

Déterminer les entiers N_p $\left(a_{N_p} \text{ est différent de } 0\right)$.

Démontrer que chaque réel a_k est soit nul, soit égal à 2^{-u_k} où u_k est un entier. Préciser a_k pour k = 0 , $k = N_p$ et $k = 4^p$.

Soit γ_p le nombre de réels a_k différents de zéro pour lesquels l'indice k est inférieur à N_p .

Etablir la relation : $\gamma_{p+1} - \gamma_p = 3^p$.

2°) Soit F_p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_p(x) = \int_0^x g_p(t)\, dt .$$

a) Démontrer la relation : $F_p(x + 2\pi) - F_p(x) = 2\pi$.

b) Démontrer qu'il existe une série positive convergente de terme général v_p telle que pour tout réel x :

$$|F_{p+1}(x) - F_p(x)| \leqslant v_p .$$

c) Démontrer qu'il existe une fonction H de C telle que pour tout x :

$$H(x) = -x + \lim_{p \to \infty} F_p(x) .$$

3°) Calculer le coefficient de Fourier d'indice 4^p de H, $C_{4^p}(H)$.

En déduire que la suite $k.C_k(H)$ $k \in \mathbb{Z}$ ne tend pas vers 0 .

Quelle conclusion peut-on en tirer sur la dérivabilité de H ?

FIN DU PROBLEME